MEDIDA Y PROBABILIDAD

Miguel Ángel García Álvarez

Teoría General de la Medida

Funciones finitamente aditivas, σ-aditivas y σ-subaditivas

Vamos a trabajar con el conjunto de números reales extendidos, el cual consiste del conjunto de números reales y dos elementos especiales, $-\infty$ y ∞, con los cuales operaremos bajo las siguientes convenciones:

Si $c \in \mathbb{R}$, entonces:

$-\infty < c < \infty$

$c - \infty = -\infty$

$c + \infty = \infty$

$c\,(\infty) = \infty$ si $c > 0$

$c\,(\infty) = -\infty$ si $c < 0$

$(0)\,(\infty) = (0)\,(-\infty) = 0$

$\frac{c}{\infty} = \frac{c}{-\infty} = 0$

$(\infty)\,(\infty) = \infty + \infty = \infty$

$\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$ no están definidos

$\overline{\mathbb{R}}$ denotará al conjunto $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Definición 1 (**Función finitamente aditiva sobre un álgebra**). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es finitamente aditiva si dada cualquier familia finita, $A_1, \ldots, A_n$, de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces:*

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

Obsérvese que, si $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$, para probar que una función $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es finitamente aditiva, basta con demostrar que si A y B son dos conjuntos ajenos del álgebra, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Teniendo esta propiedad, la aditividad finita se prueba con un razonamiento de inducción.

Definición 2 (Función $\boldsymbol{\sigma}$-aditiva sobre un álgebra). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es σ-aditiva si es finitamente aditiva y dada cualquier familia infinita numerable, $A_1, A_2, \ldots$, de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Definición 3 (Función $\boldsymbol{\sigma}$-aditiva sobre una σ-álgebra). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\Im$ una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \Im \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es σ-aditiva si es finitamente aditiva y dada cualquier familia infinita numerable, $A_1, A_2, \ldots$, de elementos de $\Im$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Definición 4 (Función $\boldsymbol{\sigma}$-subaditiva sobre un álgebra). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es σ-subaditiva, o que satisface la propiedad de la subaditividad numerable, si dada cualquier colección infinita $A_1, A_2, \ldots$ de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Definición 5 (Función $\boldsymbol{\sigma}$-subaditiva sobre una $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\Im$ una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \Im \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es σ-subaditiva, o que satisface la propiedad de la subaditividad numerable, si dada cualquier colección infinita $A_1, A_2, \ldots$ de elementos de $\Im$, entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Proposición 1. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función no negativa finitamente aditiva, entonces:*

1. Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. Además, si $\mu\,(A) < \infty$, entonces $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.

2. Para cualquier pareja $A, B \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) < \infty$ o $\mu(B) < \infty$, se tiene:

$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

3. Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, entonces $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$.

Demostración

Sean $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \subset B$, entonces $B = A \cup (B - A)$, así que $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$. Por lo tanto, $\mu(A) \leq \mu(B)$, ya que μ es no negativa.

Sean ahora $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ y definamos $A_0 = \emptyset$, entonces:

$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}\left(A_k - \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j\right)\right)$

$= \sum_{k=1}^{n} \mu\left(A_k - \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$

■

Medidas sobre álgebras y σ-álgebras

Definición 6. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\Im$ una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \Im \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es una medida si μ es σ-aditiva y $\mu(\emptyset) = 0$.*

Obsérvese que si hay algún elemento en $\Im$, de medida finita, la condición $\mu(\emptyset) = 0$ es redundante ya que, si $A \in \Im$ y $\mu(A) < \infty$, entonces:

$$\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset)$$

Así que $\mu(\emptyset) = 0$.

Definición 7. *Llamaremos espacio de medida a una terna $(\mathbb{F}, \Im, \mu)$ donde $\mathbb{F}$ es un conjunto, $\Im$ una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \Im \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ una medida.*

Definición 8. *Sea $(\mathbb{F}, \Im, \mu)$ un espacio de medida. Diremos que μ es finita si $\mu(\mathbb{F}) < \infty$. Diremos que μ es σ-finita si existe una colección infinita numerable de conjuntos $E_k \in \Im$ tales que $\mathbb{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y $\mu(E_k) < \infty$ para cualquier k.*

Si μ es σ-finita, los conjuntos $E_k \in \Im$ tales que $\mathbb{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y $\mu(E_k) < \infty$ para cualquier k, pueden escogerse de tal forma que sean ajenos por parejas. En efecto, los conjuntos $E'_k = E_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j$ son ajenos por parejas, $E'_k \in \Im$ y $\mu(E'_k) < \infty$ para cualquier k, y $\mathbb{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E'_k$. También pueden elegirse los conjuntos E_k de tal forma que la sucesión $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sea creciente. En efecto, si se tiene una sucesión de conjuntos $E_k \in \Im$ tales que $\mathbb{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y $\mu(E_k) < \infty$ para cualquier k, entonces, definiendo, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $E'_k = \bigcup_{j=1}^{k} E_j$, la sucesión $\left(E'_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente y tiene la misma propiedad.

Teorema 1. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\Im$ una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \Im \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida. Entonces:*

1. Para cualquier sucesión creciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\Im$, se tiene:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \text{lím}_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

2. Para cualquier sucesión decreciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\Im$, tales que $\mu(A_N) < \infty$ para alguna $N \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$$

Demostración

1. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de elementos de $\Im$.

Si $\mu(A_n) = \infty$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n) = \infty$ y $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \infty$; así que $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$.

Supongamos ahora que $\mu(A_n) < \infty$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Definamos $B_1 = A_1$ y, para cada $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $B_n = A_n - A_{n-1}$. Entonces los conjuntos $B_1, B_2, \ldots$ pertenecen a $\Im$, son ajenos por parejas y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Así que:

$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$

$= \mu(B_1) + \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{k=2}^{n} \mu(A_k - A_{k-1}) = \mu(B_1) + \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{k=2}^{n} [\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})]$

$= \mu(B_1) + \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n) - \mu(A_1) = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$

2. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión decreciente de elementos de $\Im$ tales que $\mu(A_N) < \infty$ para alguna $N \in \mathbb{N}$.

Para cada $k \in \{N+1, N+2, \ldots\}$, definamos $B_k = A_N - A_k$. Entonces la sucesión $(B_{N+n})_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y $\bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_n = A_N - \bigcap_{n=N+1}^{\infty} A_n$, así que:

$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=N+1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_N) - \mu\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_n\right)$

$= \mu(A_N) - \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(B_{N+n}) = \mu(A_N) - \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_N - A_{N+n})$

$= \text{lím}_{n\to\infty} \mu(A_{N+n}) = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$

■

Límites superior e inferior de una sucesión de conjuntos

Las propiedades demostradas en el resultado anterior dan la idea de que una medida es continua en un cierto sentido, aunque rigurosamente, para poder hablar de la continuidad de una medida se requiere que en el dominio donde está definida, en este caso una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto, se tenga definida una topología que nos permita hablar de vecindades y límites en ese dominio. No la tenemos definida; sin embargo, podemos definir lo que entendemos por el límite de una sucesión de conjuntos, cuando existe, basándonos en conceptos similares a los de límite superior e inferior de una sucesión de números reales.

Definición 1. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se dice que un número real x es punto límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si existe una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x. También diremos que ∞ (resp. $-\infty$) es punto límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si existe una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que diverge a ∞ (resp. $-\infty$).*

Teorema 2. *Si la sucesión (x_n) está acotada entonces existe por lo menos un número real x que es punto límite de (x_n).*

Demostración

Sea $M \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq M$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Definamos inductivamente una sucesión de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ tales que:

1. $b_n - a_n = \frac{M}{2^{n-2}}$
2. $I_{n+1} \subset I_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$
3. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, I_n contiene una infinidad de términos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Esta definición puede hacerse de la siguiente manera:

Definamos $I_1 = [-M, M]$.

Habiendo definido el intervalo $I_n = [a_n, b_n]$ con las propiedades mencionadas, sea c_n el punto medio de I_n. Entonces, al menos uno de los intervalos $[a_n, c_n]$ ó $[c_n, b_n]$ contiene una infinidad de términos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Definamos entonces I_{n+1} como cualquiera de esos dos intervalos que contenga una infinidad de términos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La sucesión de intervalos I_n así construida satisface las propiedades mencionadas.

Por el teorema de los intervalos encajados, se tiene:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

Además, como la longitud de los intervalos I_n tiende a cero, la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ contiene un único punto x.

Tomemos en cada intervalo I_n un elemento x_{k_n} de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tal forma que $k_{n+1} > k_n$. Entonces, $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x.

■

Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada, entonces existe una subsucesión que diverge a ∞ o a $-\infty$, así que se tiene el siguiente resultado:

Corolario 3. *Toda sucesión tiene por lo menos un punto límite.*

Proposición 4. *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si x es el único punto límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración

Es inmediato que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x entonces toda subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a x, así que x es el único punto límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Supongamos ahora que x es el único punto límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esto implica, en particular que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada pues, de otra forma, ∞ o $-\infty$ sería también punto límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a x, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cualquier $N \in \mathbb{N}$, existe $n \geq N$ tal que $|x_n - x| \geq \varepsilon$. Se puede entonces tomar una sucesión creciente de números naturales $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $|x_{k_n} - x| \geq \varepsilon$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema 2, existe un número real y que es punto límite de $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Se tiene $|y - x| \geq \varepsilon$, así que $y \neq x$, lo cual contradice el que x es el único punto límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

■

Por la completez del conjunto de los números reales sabemos que todo conjunto acotado por arriba (resp. acotado por abajo) tiene un supremo (resp. ínfimo).

Vamos a trabajar con la convención siguiente:

Si A es un conjunto de números reales que no está acotado por arriba, definimos el supremo de A como ∞. De la misma manera, si A no está acotado por abajo, definimos el ínfimo de A como $-\infty$.

De esta forma, todo conjunto de números reales tiene un supremo y un ínfimo.

Definición 5 (**Límites superior e inferior de una sucesión**). *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Definimos el límite superior de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\limsup (x_n)$, y el límite inferior de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\liminf (x_n)$, de la siguiente manera:*

1. $\liminf (x_n) = \inf \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : x \text{ es punto límite de } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$
2. $\limsup (x_n) = \sup \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : x \text{ es punto límite de } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$

Se tiene siempre $\liminf (x_n) \leq \limsup (x_n)$ y la proposición 4 implica inmediatamente el siguiente resultado:

Proposición 6. *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y sólo si:*

$$\liminf (x_n) = \limsup (x_n) \in \mathbb{R}$$

En algunos textos se definen el límite inferior y superior de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera:

$$\liminf (x_n) = \sup \{\inf \{x_j : j \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\limsup (x_n) = \inf \{\sup \{x_j : j \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$$

En la siguiente proposición se demuestra la equivalencia de estas definiciones con las que dimos con anterioridad.

Proposición 7 (**Caracterización de los límites superior e inferior**). *Para cualquier sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene:*

1. $\liminf (x_n)$ *es punto límite de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y:*
   $\liminf (x_n) = \sup \{\inf \{x_j : j \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$
2. $\limsup (x_n)$ *es punto límite de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y:*
   $\limsup (x_n) = \inf \{\sup \{x_j : j \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$

Demostración

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $z_n = \text{ínf}\,\{x_j : j \geq n\}$.

La sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no decreciente así que el límite $z = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} z_n$ existe y es un número real ya que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. Además:

$$\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} z_n = \sup\{\text{ínf}\,\{x_j : j \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$$

Así que, dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $z - \varepsilon < z_n \leq z$ para cualquier $n \geq N$. Existe entonces una subsucesión $(z_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z - \frac{1}{n} < z_{k_n} \leq z$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$; es decir, $z - \frac{1}{n} < \text{ínf}\,\{x_j : j \geq k_n\} \leq z$.

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $j_n \geq k_n$ tal que $z - \frac{1}{n} < x_{j_n} \leq z$. La sucesión $j_1, j_2, \ldots$ no necesariamente es creciente, pero, como la sucesión $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, podemos seleccionar una subsucesión $j_{i_1}, j_{i_2}, j_{i_3}, \ldots$ de tal manera que la sucesión $(j_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sea estrictamente creciente. Para los elementos de esa subsucesión se tiene que $z - \frac{1}{i_n} < x_{j_{i_n}} \leq z$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} x_{j_{i_n}} = z$. Así que z es punto límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y, además, $\text{lím ínf}\,(x_n) \leq z$.

Ahora bien, como, dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $z_n > z - \varepsilon$ para cualquier $n \geq N$, se tiene que $x_n > z - \varepsilon$ para cualquier $n \geq N$. Por lo tanto, si $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene $\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} x_{k_n} \geq z - \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$, así que $\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} x_{k_n} \geq z$. Por lo tanto, $\text{lím ínf}\,(x_n) \geq z$. Así que:

$$\text{lím ínf}\,(x_n) = z = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} z_n = \sup\{\text{ínf}\,\{x_j : j \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$$

2. Observemos que x es punto límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si $-x$ es punto límite de $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, así que, $\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty}(\sup\{x_j : j \geq n\}) = -\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty}(\text{ínf}\,\{x_j : j \geq n\})$ es punto límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Además:

$\text{lím sup}\,(x_n) = -\,\text{lím ínf}\,(-x_n) = -\,\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty}(\text{ínf}\,\{-x_j : j \geq n\})$

$= -\,\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty}(-\sup\{x_j : j \geq n\}) = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty}(\sup\{x_j : j \geq n\})$

$\blacksquare$

Definición 9. *Si $\mathbb{F}$ es un conjunto y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{F}$, definimos:*

$$\text{lím ínf}_{n\rightsquigarrow\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

$$\text{lím sup}_{n\rightsquigarrow\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

Si $\limsup_{n\rightsquigarrow\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$, se dice que la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y al valor común de $\liminf_{n\rightsquigarrow\infty} A_n$ y $\limsup_{n\rightsquigarrow\infty} A_n$ se le denota por $\lim_{n\to\infty} A_n$.

Obsérvese que **el límite inferior de una sucesión** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **de subconjuntos de un conjunto** F **es el conjunto formado por todos los elementos** $x \in F$ **tales que existe** $N \in \mathbb{N}$ **tal que** $x \in A_n$ **para cualquier** $n \geq N$.

Por su parte, **el límite superior de una sucesión** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **de subconjuntos de un conjunto** F **es el conjunto formado por todos los elementos** $x \in F$ **tales que** $x \in A_n$ **para una infinidad de números naturales** n.

Obsérvese también que si la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; mientras que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, entonces $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Teorema 2. *Sea* $(\mathbb{F}, \Im, \mu)$ *un espacio de medida. Supongamos que* μ *es finita y sea* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de elementos de* $\Im$ *tal que* $\limsup_{n\rightsquigarrow\infty} A_n = \liminf_{n\rightsquigarrow\infty} A_n$, *entonces la sucesión* $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente y:*

$$\mu\left(\lim_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$$

Demostración

Observemos primero que, como μ es finita, $\mu(\mathbb{F}) \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, dada cualquier sucesión, $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\Im$, la sucesión $(\mu(D_n))_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada.

Definamos $A = \lim A_n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $B_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ y $C_n = \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$. Entonces, la sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y la sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Además:

$$\mu\left(\lim_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right) = \mu\left(\liminf_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(C_n)$$

$$\mu\left(\lim_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right) = \mu\left(\limsup_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(B_n)$$

Por otra parte, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $B_n \supset A_n$ y $C_n \subset A_n$, así que:

$\mu(C_n) \leq \mu(A_n) \leq \mu(B_n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto:

$\mu\left(\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right) = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu\left(C_n\right) = \text{lím ínf}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu\left(C_n\right) \leq \text{lím ínf}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu\left(A_n\right)$

$\leq \text{lím sup}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu\left(A_n\right) \leq \text{lím sup}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu\left(B_n\right) = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu\left(B_n\right) = \mu\left(\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right)$

Así que, $\text{lím ínf}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu\left(A_n\right) = \text{lím sup}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu\left(A_n\right) = \mu\left(\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right)$.

Por lo tanto, la sucesión $\left(\mu\left(A_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y:

$$\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu\left(A_n\right) = \mu\left(\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right)$$

■

Quasi medidas

En general, una medida se obtiene definiéndola primero para una familia de subconjuntos de un conjunto que no necesariamente forma una σ-álgebra; después se extiende a una familia más grande siguiendo el método de Lebesgue. Lo más común es buscar definirla sobre un álgebra de subconjuntos de un conjunto y después extenderla a la σ-álgebra generada por esa álgebra.

Definición 10 (**quasi medida**). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Diremos que una función no negativa $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es una quasi medida si es finitamente aditiva, σ-subaditiva y $\mu\left(\emptyset\right) = 0$.*

Lema 1. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función no negativa y finitamente aditiva. Supongamos que $\mu\left(B\right) < \infty$ para algún elemento $B \in \mathcal{A}$, entonces $\mu\left(\emptyset\right) = 0$.*

Demostración

$B = B \cup \emptyset$

Así que:

$\mu\left(B\right) = \mu\left(B\right) + \mu\left(\emptyset\right)$

Por lo tanto, $\mu\left(\emptyset\right) = 0$.

■

En ocasiones, es más simple probar alguna propiedad equivalente a la σ-subaditividad de una quasi medida. A continuación se muestra cuáles son esas propiedades.

Teorema 3. *Sea* $\mathbb{F}$ *un conjunto,* $\mathcal{A}$ *un álgebra de subconjuntos de* $\mathbb{F}$ *y* $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ *una función no negativa y finitamente aditiva, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

i. μ es σ-subaditiva.

ii. μ es σ-aditiva.

iii. Para cualquier sucesión creciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{A}$, tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, se tiene:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$$

Demostración

$i \iff ii$

Supongamos que μ es σ-subaditiva y sea $A_1, A_2, \ldots$ una colección infinita numerable de elementos de $\mathcal{A}$, ajenos por parejas y tales que $\bigcup_j A_j \in \mathcal{A}$. Se tiene:

$\mu(\bigcup_j A_j) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_j)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que $\mu(\bigcup_j A_j) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

Por lo tanto, μ es σ-aditiva.

Supongamos ahora que μ es σ-aditiva y sea $A_1, A_2, \ldots$ una colección numerable de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcup_j A_j \in \mathcal{A}$. Sea $B_n = A_n - \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$, entonces $\bigcup_j A_j = \bigcup_j B_j$, así que:

$$\mu(\bigcup_j A_j) = \mu(\bigcup_j B_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

$ii \Longrightarrow iii$

Supongamos que μ es σ-aditiva y sea $A_1, A_2, \ldots$ una colección de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Si $\mu(A_k) = \infty$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, el resultado es inmediato. Supongamos entonces que $\mu(A_k) < \infty$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \cdots$$

Así que, definiendo $A_0 = \emptyset$, se tiene:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k - A_{k-1}) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k - A_{k-1}) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$$

$iii \Longrightarrow i$

Sea $A_1, A_2, \ldots$ una colección numerable de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcup_j A_j \in \mathcal{A}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $B_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, entonces $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ y $\bigcup_j A_j = \bigcup_j B_j$, así que:

$$\mu(\bigcup_j A_j) = \mu(\bigcup_j B_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \leq \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

■

Corolario 1. *Sea $(\mathbb{F}, \Im, \mu)$ un espacio de medida. Entonces μ es σ-subaditiva.*

Corolario 2. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una quasi medida. Entonces μ es σ-aditiva y para cualquier sucesión creciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{A}$, tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, se tiene $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$.*

Corolario 3. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una quasi medida. Entonces, para cualquier sucesión decreciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{A}$, tales que $\mu(A_N) < \infty$ para alguna $N \in \mathbb{N}$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, se tiene:*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$$

Demostración

Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión decreciente de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\mu(A_N) < \infty$ para alguna $N \in \mathbb{N}$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Para cada $k \in \{N+1, N+2, \ldots\}$, definamos $B_k = A_N - A_k$. Entonces la sucesión $(B_{N+n})_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y:

$$\bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_n = A_N - \bigcap_{n=N+1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

Así que:

$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=N+1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_N) - \mu\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_n\right)$

$= \mu(A_N) - \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_N - A_{N+n}) = \mu(A_N) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_{N+n}) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$

■

Teorema 4. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una función no negativa y finitamente aditiva, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

i. μ es σ-subaditiva.

ii. μ es σ-aditiva.

iii. Para cualquier sucesión creciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, se tiene:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$$

iv. Para cualquier sucesión decreciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, se tiene:

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$$

v. Para cualquier sucesión decreciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$$

Demostración

La equivalencia de i, ii y iii ya se demostró para cualquier función $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ función finitamente aditiva.

$iii \implies iv$ es inmediato tomando complementos.

$iv \implies v$ es inmediato pues v es un caso particular de iv.

$v \implies ii$

Sea $A_1, A_2, \ldots$ una colección numerable de elementos de $\mathcal{A}$, ajenos por parejas y tales que $\bigcup_j A_j \in \mathcal{A}$. Sea $B_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j - \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, entonces $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$.

Por lo tanto, $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(B_n) = 0$, así que:

$$\mu(\textstyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

■

Construcción de medidas

En esta sección $\mathbb{F}$ será un conjunto cualquiera fijo, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y μ_0 una quasi medida sobre $\mathcal{A}$. Todos los conjuntos con los que trataremos serán subconjuntos de $\mathbb{F}$.

Vamos a ver cómo, siguiendo el método de Lebesgue, se puede extender una quasi medida, definida sobre un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{F}$, a la σ-álgebra, $\sigma(\mathcal{A})$, generada por el álgebra. Primero definiremos la medida exterior de cualquier subconjunto de $\mathbb{F}$; después definiremos la medibilidad de un conjunto utilizando el criterio de Carathéodory. Una vez hecho esto, mostraremos que la familia de conjuntos medibles forma una σ-álgebra, la cual contiene a los elementos de $\mathcal{A}$ y a los conjuntos de medida exterior cero. La medida de un conjunto medible la definiremos como su medida exterior y mostraremos que la medida así definida, restringida a $\mathcal{A}$, coincide con μ_0.

Definición 11. *Diremos que una colección finita o infinita numerable $A_1, A_2, \ldots$ de elementos de $\mathcal{A}$ es una cubierta del conjunto A si $A \subset \bigcup_n A_n$.*

Definición 12 (Medida exterior). *Se define la medida exterior, $\mu_e(A)$, de un conjunto A, mediante la relación*

$$\mu_e(A) = \inf\left\{\textstyle\sum_j \mu_0(A_j) : A_1, A_2, \ldots \text{ es cubierta de } A\right\}$$

Obsérvese que si A y B son dos conjuntos tales que $A \subset B$ entonces $\mu_e(A) \leq \mu_e(B)$.

Gracias a la σ-subaditividad de μ_0 se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2. *Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $\mu_e(A) = \mu_0(A)$.*

Demostración

Sea $A \in \mathcal{A}$ y $A_1, A_2, \ldots$ una cubierta de A, entonces $A_n \cap A \in \mathcal{A}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $A = \bigcup_n (A_n \cap A)$; así que, como μ_0 es σ-subaditiva:

$$\mu_0(A) \leq \sum_n \mu_0(A_n \cap A) \leq \sum_n \mu_0(A_n)$$

Por lo tanto, como esto ocurre para cualquier cubierta de A, $\mu_0(A) \leq \mu_e(A)$.

Por otra parte, como A es una cubierta de él mismo, se tiene $\mu_e(A) \leq \mu_0(A)$.

■

Proposición 3. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos, entonces:*

$$\mu_e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(A_n)$$

Demostración

Si $\mu_e(A_n) = \infty$ para alguna n el resultado es trivial.

Supongamos entonces que $\mu_e(A_n) < \infty$ para toda n. Dada $\varepsilon > 0$, para cada conjunto A_n sea $A_{n1}, A_{n2}, \ldots$ una cubierta de A_n tal que $\sum_m \mu_0(A_{nm}) < \mu_e(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. La familia de conjuntos A_{nm} forman una cubierta de $\bigcup_n A_n$, así que:

$$\mu_e\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \sum_m \mu_0(A_{nm}) \leq \sum_n \left[\mu_e(A_n) + \tfrac{\varepsilon}{2^n}\right] \leq \sum_n \mu_e(A_n) + \varepsilon$$

Es decir, $\mu_e\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu_e(A_n) + \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Por lo tanto:

$$\mu_e\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu_e(A_n)$$

■

Definición 13 (Criterio de medibilidad de Carathéodory). *Diremos que un conjunto E es medible si $\mu_e(A) = \mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c)$ para cualquier conjunto A. Además, en ese caso, se define la medida de E, $\mu(E)$, como la medida exterior de E.*

Obsérvese que, por la σ-subaditividad de la medida exterior, se tiene:

$$\mu_e(A) \leq \mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c)$$

para cualquier par de conjuntos E y A; de manera que para demostrar la medibilidad de un conjunto E únicamente es necesario probar la otra desigualdad.

Obsérvese también que el conjunto vacío es medible y su medida es cero.

Vamos a demostrar los siguientes resultados:

1. Todo conjunto de medida exterior cero es medible.

2. Todo elemento de $\mathcal{A}$ es medible.

3. La familia de los conjuntos medibles forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$.

4. La función que asigna a cada conjunto medible su medida es finitamente aditiva.

5. La familia de los conjuntos medibles forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$.

6. La función que asigna a cada conjunto medible su medida es una función σ-aditiva.

7. Todo elemento de la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ es medible.

Proposición 4. *Todo conjunto de medida exterior cero es medible.*

Demostración

Sea E un conjunto de medida exterior cero y A cualquier conjunto, entonces $A \cap E$ tiene medida exterior cero, así que:

$$\mu_e(A) \geq \mu_e(A \cap E^c) = \mu_e(A \cap E^c) + \mu_e(A \cap E)$$

■

Proposición 5. *Todo elemento de $\mathcal{A}$ es medible.*

Demostración

Sea $E \in \mathcal{A}$, A cualquier conjunto y $A_1, A_2, \ldots$ una cubierta de A, entonces, para cada A_n, los conjuntos $A_n \cap E$ y $A_n \cap E^c$ pertenecen a $\mathcal{A}$ y se tiene:

$\mu_e(A \cap E) \leq \mu_e\left((\bigcup_n A_n) \cap E\right) = \mu_e\left(\bigcup_n (A_n \cap E)\right)$
$\leq \sum_n \mu_e(A_n \cap E) = \sum_n \mu_0(A_n \cap E)$

$\mu_e(A \cap E^c) \leq \mu_e\left((\bigcup_n A_n) \cap E^c\right) = \mu_e\left(\bigcup_n (A_n \cap E^c)\right)$
$\leq \sum_n \mu_e(A_n \cap E^c) = \sum_n \mu_0(A_n \cap E^c)$

Así que:

$$\mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c) \leq \sum_n \mu_0(A_n \cap E) + \sum_n \mu_0(A_n \cap E^c) = \sum_n \mu_0(A_n)$$

Finalmente, como lo anterior es válido para cualquier cubierta de A, se puede concluir que:

$$\mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c) \leq \mu_e(A)$$

■

Proposición 6. *La familia de los conjuntos medibles forma un álgebra de subconjuntos de* $\mathbb{F}$.

Demostración

Que el complemento de un conjunto medible es medible es evidente por la simetría de la condición de medibilidad.

$\mathbb{F}$ es medible ya que es el complemento del conjunto vacío, el cual es medible.

Sean E_1 y E_2 dos conjuntos medibles y A cualquier conjunto.

Obsérvese que $A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)$.

Además, como E_2 es medible y $A \cap E_1^c$ es un subconjunto de $\mathbb{F}$, se tiene:

$m_e(A \cap E_1^c \cap E_2) + m_e\left(A \cap E_1^c \cap E_2^c\right) = m_e(A \cap E_1^c)$

Así que:

$m_e\left(A \cap (E_1 \cup E_2)\right) + m_e\left(A \cap (E_1 \cup E_2)^c\right)$

$= m_e\left((A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)\right) + m_e\left(A \cap E_1^c \cap E_2^c\right)$

$\leq m_e(A \cap E_1) + m_e(A \cap E_1^c \cap E_2) + m_e\left(A \cap E_1^c \cap E_2^c\right)$

$= m_e(A \cap E_1) + m_e(A \cap E_1^c) = m_e(A)$

Por lo tanto, $E_1 \cup E_2$ es medible.

∎

Proposición 7. *La función que asigna a cada conjunto medible E su medida, $\mu(E)$, es una función finitamente aditiva.*

Demostración

Sean E_1 y E_2 dos conjuntos medibles ajenos, entonces, como $E_1 \cup E_2$ es medible, se tiene:

$$\mu\left(E_1 \cup E_2)\right) = \mu\left((E_1 \cup E_2)) \cap E_1\right) + \mu\left((E_1 \cup E_2) \cap E_1^c\right) = \mu\left(E_1\right) + \mu\left(E_2\right)$$

∎

Proposición 8. *La familia de los conjuntos medibles forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$.*

Demostración

Sea $E_1, E_2, \ldots$ una colección infinita numerable de conjuntos medibles ajenos por parejas y A cualquier subconjunto de $\mathbb{F}$.

Demostremos que $\mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu_e(A \cap E_j)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ la igualdad es obvia.

Supongamos ahora que la igualdad es válida para $n = k$, entonces, como E_{k+1} es medible, se tiene:

$\mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j)\right) = \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j) \cap E_{k+1}\right) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j) \cap E_{k+1}^c\right)$

$= \mu_e\left(A \cap E_{k+1}\right) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{k} E_j)\right) = \mu_e\left(A \cap E_{k+1}\right) + \sum_{j=1}^{k} \mu_e(A \cap E_j)$

$= \sum_{j=1}^{k+1} \mu_e(A \cap E_j)$

Por lo tanto, la igualdad es válida para $n = k + 1$, así que, por el principio de inducción, lo es para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, como la familia de conjuntos medibles forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\bigcup_{j=1}^{n} E_j$ es medible, así que:

$\mu_e(A) = \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)\right) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)^c\right)$

$= \sum_{j=1}^{n} \mu_e(A \cap E_j) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)^c\right)$

$\geq \sum_{j=1}^{n} \mu_e(A \cap E_j) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c\right)$

Tomando límite cuando $n \rightsquigarrow \infty$ y utilizando la σ-subaditividad de la medida exterior se obtiene:

$\mu_e(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_e(A \cap E_j) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c\right)$

$\geq \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)\right) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c\right)$

Por lo tanto, $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ es medible.

Sea ahora $F_1, F_2, \ldots$ una colección infinita numerable de conjuntos medibles, no necesariamente ajenos por parejas.

Definamos una nueva familia de conjuntos medibles, $E_1, E_2, \ldots$, de la siguiente manera:

$E_1 = F_1$

$E_n = F_n - \cup_{k=1}^{n-1} F_k$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ mayor que 1.

Como la familia de conjuntos medibles forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$, los conjuntos $E_1, E_2, \ldots$ son medibles; además, son ajenos por parejas y $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Por lo tanto, $\cup_{n=1}^{\infty} F_n$ es medible.

$\blacksquare$

Corolario 4. *Todo elemento de $\sigma(\mathcal{A})$ es medible.*

Demostración

El resultado es inmediato pues la familia de conjuntos medibles forma una σ-álgebra que contiene a los elementos de $\mathcal{A}$.

$\blacksquare$

Proposición 9. *La función que asigna a cada conjunto medible E su medida, $\mu(E)$, es σ-aditiva.*

Demostración

Sea $E_1, E_2, \ldots$ una colección infinita numerable de conjuntos medibles ajenos por parejas. Por la σ-subaditividad de la medida exterior, se tiene $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$. Por otra parte, por la aditividad finita de la función que asigna a cada conjunto medible su medida, se tiene, para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \geq \mu(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j)$$

Así que tomando límite cuando $n \rightsquigarrow \infty$, se tiene:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

$\blacksquare$

Si denotamos por $\mathcal{M}$ a la familia de los conjuntos medibles, sabemos ya que $\mathcal{M}$ forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Además, la función $\mu : \mathcal{M} \mapsto \overline{R}$ es no negativa, σ-aditiva y $\mu(\emptyset) = 0$. Así que μ es una medida definida sobre una σ-álgegra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ la cua es una extensión de μ_0. $\mathcal{M}$ es más grande que la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ ya que todos los conjuntos de medida exterior cero son medibles. Esto es análogo a lo que ocurre con la medida de Lebesgue, la cual está definida no únicamente sobre los subconjuntos borelianos de $\mathbb{R}$, sino también sobre todos los conjuntos de medida cero.

Los resultados anteriores pueden condensarse en el siguiente teorema:

Teorema 5 (Teorema de extensión de Carathéodory)**.** *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu_0 : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ una quasi medida. Entonces existe una medida $\mu : \Im \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ tal que $\mu(A) = \mu_0(A)$ para cualquier $A \in \mathcal{A}$, donde $\Im$ es una σ-álgebra que contiene a $\sigma(\mathcal{A})$ y a los conjuntos de medida exterior cero.*

Definición 14. *Si $\mathbb{F}$ es un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu_0 : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una quasi medida. A la medida $\mu : \Im \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ del teorema anterior la llamaremos la medida generada por la quasi medida μ_0.*

La σ-álgebra de los conjuntos medibles

Ahora veremos que la familia de los conjuntos medibles, si bien es más grande que la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$, en general no es más grande que la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ y los subconjuntos de $\mathbb{F}$ que tienen medida exterior cero. Esto ocurre, en particular, si la medida obtenida mediante el teorema de extensión de Carathéodory es σ-finita.

Obsérvese que si un conjunto $B \subset \mathbb{F}$ tiene medida exterior cero, entonces, dada cualquier $\varepsilon > 0$ existe una colección infinita numerable, $A_1, A_2 \ldots$, de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k) < \varepsilon$. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 15. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu_0 : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ una quasi medida. Diremos que un conjunto $B \subset \mathbb{F}$ tiene medida μ_0 cero si, dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe una colección infinita numerable, $A_1, A_2 \ldots$, de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k) < \varepsilon$.*

Obviamente, un conjunto $B \subset \mathbb{F}$ tiene medida exterior cero si y sólo si tiene medida μ_0 cero.

Proposición 10. *Si μ es finita, dado cualquier conjunto medible E, existe $B \in \sigma(\mathcal{A})$ y un conjunto C, de medida cero, tales que $E = B \cup C$ y $B \cap C = \emptyset$.*

Demostración

Sea E un conjunto medible. Entonces, como E^c es medible, dada $n \in \mathbb{N}$, existe una cubierta de E^c, $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots$ tal que:

$$\sum_j \mu(A_j^{(n)}) < \mu(E^c) + \frac{1}{n}$$

$A^{(n)} = \bigcup_j A_j^{(n)}$ es entonces un elemento $\sigma(\mathcal{A})$ tal que:

$$\mu(A^{(n)} - E^c) = \mu(A^{(n)}) - \mu(E^c) \leq \sum_j \mu(A_j^{(n)}) - \mu(E^c) < \frac{1}{n}$$

Por lo tanto, si $A = \cap_{n=1}^{\infty} A^{(n)}$, se tiene $E^c \subset A$ y, para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu(A - E^c) \leq \mu(A^{(n)} - E^c) < \tfrac{1}{n}$$

Así que, $\mu(A - E^c) = 0$.

Por lo tanto, si $B = A^c$, se tiene que $B \subset E$ y:

$$\mu(E - B) = \mu(E \cap B^c) = \mu(E \cap A) = \mu(A \cap E) = \mu(A - E^c) = 0$$

Definiendo $C = E - B$, se tiene $E = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$, $B \in \sigma(\mathcal{A})$ y $\mu(C) = 0$.

■

Proposición 11. *Si μ es σ-finita, entonces, dado cualquier conjunto medible E existe $A \in \sigma(\mathcal{A})$ y un conjunto C, de medida cero, tales que $E = A - C$.*

Demostración

Sea $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medibles, ajenos por parejas, tales que $\mathbb{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ y $\mu\left(F_k\right) < \infty$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos $E_k = E \cap F_k$.

Como E_k es medible, dada $n \in \mathbb{N}$, existe una cubierta de E_k, $A_{1,k}^{(n)}, A_{2,k}^{(n)}, \ldots$ tal que:

$$\textstyle\sum_j \mu(A_{j,k}^{(n)}) < \mu(E_k) + \frac{1}{n2^k}$$

$A_k^{(n)} = \bigcup_j A_{j,k}^{(n)}$ es entonces un elemento $\sigma(\mathcal{A})$ tal que $E_k \subset A_k^{(n)}$ y:

$$\mu(A_k^{(n)} - E_k) = \mu(A_k^{(n)}) - \mu(E_k) \leq \textstyle\sum_j \mu(A_{j,k}^{(n)}) - \mu(E_k) < \frac{1}{n2^k}$$

En palabras, para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos un conjunto $A_k^{(n)} \in \sigma(\mathcal{A})$, el cual contiene a E_k y cuya medida difiere de la de E_k en menos que $\frac{1}{n2^k}$.

La idea ahora es juntar las cubiertas de los conjuntos E_k ($k \in \mathbb{N}$) para obtener una cubierta de E.

Definamos $A^{(n)} = \cup_{k=1}^{\infty} A_k^{(n)}$. Entonces, $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k \subset A^{(n)}$ y:

$$A^{(n)} - E = A^{(n)} - (\cup_{k=1}^{\infty} E_k) \subset \cup_{k=1}^{\infty} \left(A_k^{(n)} - E_k \right)$$

Así que:

$$\mu(A^{(n)} - E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k^{(n)} - E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n2^k} = \frac{1}{n}$$

En palabras, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un conjunto $A^{(n)} \in \sigma(\mathcal{A})$, el cual contiene a E y cuya medida difiere de la de E en menos que $\frac{1}{n}$.

La idea ahora es intersectar los conjuntos $A^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$) para obtener un conjunto A en $\sigma(\mathcal{A})$ que contenga a E y tal que la medida de $A - E$ sea cero.

Definamos $A = \cap_{n=1}^{\infty} A^{(n)}$. Entonces, $A \in \sigma(\mathcal{A})$, $E \subset A$ y $A - E \subset A^{(n)} - E$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto:

$$\mu(A - E) \leq \mu(A^{(n)} - E) \leq \frac{1}{n}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Así que, $\mu(A - E) = 0$.

Finalmente, definamos $C = A - E$; entonces, C tiene medida cero y se tiene $E = A - C$.

■

Corolario 5. *Si μ es σ-finita, la σ-álgebra de los conjuntos medibles es la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ y los conjuntos de medida cero.*

Además, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 12. *Todo conjunto de medida exterior cero está contenido en un conjunto $B \in \sigma(\mathcal{A})$ de medida exterior cero.*

Demostración

Sea A un conjunto de medida exterior cero. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\{A_k^n\}$ una colección infinita numerable de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^n$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k^n) < \frac{1}{n}$. Definamos $B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^n$ y $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Entonces, $B \in \sigma(\mathcal{A})$, tiene medida exterior cero y $A \subset B$. ■

Medidas completas

Definición 16. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\Im$ una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y μ una medida sobre $\Im$. Diremos que $\Im$ es completa con respecto a μ si contiene a todos los subconjuntos de los conjuntos de medida μ igual a cero.*

Si una σ-álgebra $\Im_0$ no es completa con respecto a una medida μ, se puede completar. En efecto, sea H la familia de conjuntos $B \in \Im_0$ tales que $\mu(B) = 0$, entonces la familia $\Im$ de conjuntos de la forma $A \cup E$, donde $A \in \Im_0$ y E es un subconjunto de un conjunto $B \in H$, forma una σ-álgebra de subconjuntos de F.

La prueba de que $\mathbb{F} \in \Im$ y que $\Im$ es cerrada bajo uniones numerables es inmediata. Para probar que $\Im$ es cerrada bajo complementos, sea $C = A \cup E \in \Im$, donde $A \in \Im_0$ y E es un subconjunto de un conjunto $B \in H$. Entonces:

$$C^c = (A \cup E)^c = A^c \cap E^c = A^c \cap [E^c \cap (B \cup B^c)]$$

$$= A^c \cap [(E^c \cap B) \cup B^c] = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap E^c \cap B)$$

Así que $C^c \in \Im$.

Obsérvese que $\Im$ es la σ-álgebra generada por $\Im_0$ y los subconjuntos de conjuntos $B \in \Im_0$ de medida cero.

Extendamos μ a $\Im$ definiendo $\mu(A \cup E) = \mu(A)$ para cualesquiera $A \in \Im_0$ y E un subconjunto de un conjunto $B \in H$.

Sea $C \in \Im$ tal que $\mu(C) = 0$, entonces $C = A \cup E$, en donde $A \in \Im_0$ y $E \subset B$, con $B \in H$. Así que:

Como $\mu(A) = \mu(A \cup E) = \mu(C) = 0$, entonces $A \in H$.

Sea ahora $D \subset C$, entonces $D \subset A \cup B$, así que $D \in \Im$. Es decir, $\Im$ es completa con respecto a μ.

Lo anterior también muestra que si $C \in \Im$ y $\mu(C) = 0$, entonces $C \subset A \cup B$, con $A, B \in H$. Por lo tanto, todo conjunto $C \in \Im$ de medida cero está contenido en un conjunto $G \in \Im_0$ de medida cero.

Retomando el enunciado del teorema de extensión de Carathéodory, la medida μ restringida a $\sigma(\mathcal{A})$ sigue siendo una medida. La proposición 12 muestra entonces que si completamos $\sigma(\mathcal{A})$ con respecto a μ, obtenemos la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ y los conjuntos de medida exterior cero, es decir, recuperamos la medida μ definida sobre $\Im$.